行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

積分中梯形法則之估計

計畫類別：☑個別型計畫　□整合型計畫

計畫編號：NSC 90—2115—M—032—002

執行期間：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

個別型計畫：計畫主持人：楊國勝
　　　　　　共同主持人：

整合型計畫：總計畫主持人：
　　　　　　子計畫主持人：

註：整合型計畫總報告與子計畫成果報告請分開編印各成一冊，彙整一起繳送國科會。

處理方式：☑可立即對外提供參考
（請打ｖ）□一年後可對外提供參考
　　　　　□兩年後可對外提供參考
　　　　　（必要時，本會得展延發表時限）

執行單位：淡江大學數學系

中華民國 91 年 7 月 30 日

計劃編號：NSC 90-2115-M-032-002
執行期限：90/08/01 ~ 91/07/31
主持人　：楊國勝　淡江大學數學系教授
計劃參與人員：吳銘進　淡江大學技士

一、中文摘要

本研究計劃中，我們建立了下列的不等式：

若 $f:[a,b]\to R$ 在 (a，b) 中爲 n 次可微，令

$$\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f^{n}(x)| < \infty \quad ,$$

$$\|f^{(n)}\|_1 = \int_a^b |f^{(n)}(t)dt \quad ,$$

$$\|f^{(n)}\|_q = [\int_a^b |f^{(n)}(t)|^q\, dt]^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

$m = \inf_{x\in(a,b)} f^{(n)}(x) > -\infty$ ，以及

$M = \sup_{x\in(a,b)} f^{(n)}(x) < \infty$. 則

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \le$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)(b-a)^{k+1}}{2(k+1)!} |f^{(k)}(a)| +$$

$$\begin{cases} \dfrac{(n-1)\|f^{n}\|_\infty}{2(n+1)!}(b-a)^{n+1}, & n\ge 2 \\ \dfrac{\|f^{n}\|_{\frac{p}{p-1}}}{n!}[\dfrac{n(b-a)}{2}]^{n+\frac{1}{p}}(\int_0^{\frac{2}{n}} t^{(n-1)p}(1-t)^p\,dt)^{\frac{1}{p}}, & n\ge 2 \\ \dfrac{(n-2)\|f^{(n)}\|_1}{2n!}(b-a)^n, & n\ge 3 \\ \dfrac{(n-1)}{2(n+1)!}(b-a)^n |f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)| + \\ \dfrac{(b-a)^{n+1}(n+1)(M-n)}{8n!}, & n\ge 3. \end{cases}$$

關鍵詞：梯形法則　、　誤差估計

ABSTRACT

We have established in this project the following inequalities:

If $f:[a,b]\to R$ is n-times differentiable on (a,b) with $n\ge 1$, Let

$$\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f^{n}(x)| < \infty \quad ,$$

$$\|f^{(n)}\|_1 = \int_a^b |f^{(n)}(t)dt \quad ,$$

$$\|f^{(n)}\|_q = [\int_a^b |f^{(n)}(t)|^q\, dt]^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

$m = \inf_{x\in(a,b)} f^{(n)}(x) > -\infty$, and

$M = \sup_{x\in(a,b)} f^{(n)}(x) < \infty$, Then

$$|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \le$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)(b-a)^{k+1}}{2(k+1)!} |f^{(k)}(a)| +$$

$$\begin{cases} \dfrac{(n-1)\|f^{n}\|_\infty}{2(n+1)!}(b-a)^{n+1}, & n\ge 2 \\ \dfrac{\|f^{n}\|_{\frac{p}{p-1}}}{n!}[\dfrac{n(b-a)}{2}]^{n+\frac{1}{p}}(\int_0^{\frac{2}{n}} t^{(n-1)p}(1-t)^p\,dt)^{\frac{1}{p}}, & n\ge 2 \\ \dfrac{(n-2)\|f^{(n)}\|_1}{2n!}(b-a)^n, & n\ge 3 \\ \dfrac{(n-1)}{2(n+1)!}(b-a)^n |f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)| + \\ \dfrac{(b-a)^{n+1}(n+1)(M-n)}{8n!}, & n\ge 3. \end{cases}$$

Key words: Trapezoidal, Error estimation

二、計劃緣由與目的

梯形法則是計算積分的近似值的一種方法，其與正確值之誤差早已有人做過研究，例如，利用梯形不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\le \frac{\|f''\|_\infty}{12}(b-a)^3$$

考慮區間 $[a,b]$ 的任意分割 $P: x_0=a<x_1<\ldots<x_m=b$，則以梯形法則求

$\int_a^b f(x)dx$ 之近似值為

$$T_m=\sum_{i=1}^{m}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i-x_{i-1})$$

，因此利用梯形不等式可得

$$\left|\int_a^b f(x)dx-T_m\right|\le\frac{\|f''\|_\infty}{12}\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})^3$$

最近 S.S. Dragomir, P. Cerone 及 A. Sofo 導出下列不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\le
\begin{cases}
\frac{1}{2}\|f''\|_q B(p,q)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{2+\frac{1}{p}} \\
\frac{\|f''\|_1}{8}(b-a)^2 \\
\frac{(b-a)^2}{12}|f'(b)-f'(a)|+\frac{(b-a)^3}{32}(M-m)
\end{cases}$$

上面的不等式，提供梯形法則不同的誤差估計值。

本計劃之目的，就是要建立一個不等式，使得 Dragomir 等人所做的不等式，全含在我們所建立的不等式中。

研究成果

我們建立了下列的不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\le \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(b-a)^{k+1}}{2(k+1)!}|f^{(k)}(a)| +
\begin{cases}
\frac{(n-1)\|f''\|_\infty}{2(n+1)!}(b-a)^{n+1}, & n\ge 2 \\
\frac{\|f''\|_{\frac{p}{p-1}}}{n!}\left[\frac{n(b-a)}{2}\right]^{n+\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{2}{n}} t^{(n-1)p}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, & n\ge 2. \\
\frac{(n-2)\|f^{(n)}\|_1}{2n!}(b-a)^n, & n\ge 3 \\
\frac{(n-1)}{2(n+1)!}(b-a)^n|f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)|+\frac{(b-a)^{n+1}(n+1)(M-n)}{8n!}, & n\ge 3.
\end{cases}$$

其中 $m=\inf_{a<x<b} f(x)$, $M=\sup_{a<x<b} f(x)$.

參考文獻

1. S.S. Dragomir, P. Cerone and A. Sofo, Some remarks on trapezoid rule in numerical integration, Indian J. Pure Appl. Math. 31(5), 2000, 475-494.
2. D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric and A. M. Fink, Inequalities involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 1994.